パルス状波形のスペクトラム(FT)と周波数成分(係数)からの合成(IFT)

方形波(矩形波)は、電子回路の中では頻繁に扱われる波形で、フーリエ変換などの例題としても教科書や参考書で多く取り上げられている。今回は、デューティーの違いによるスペクトラムの各周波数の関係と、フーリエ係数から波形の合成(逆FT)をLTspiceを使って、確かめる。

デューティーサイクルを考慮したフーリエ係数の計算(1)

まず、F(x)という関数(波形)が以下のようにSIN(x)とCOS(x)の線形一時多項式(級数)で表されると考える(証明などは他書に譲る)。このとき、F(x)は正弦(余弦)関数の一番長い周期を基本単位(周期)として繰り返しているものと考える。

$$F(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots a_n\cos nx+\cdots$$

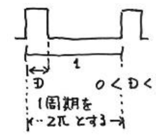
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots b_n\sin nx+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ここで初項のaoに1/2の係数が付いているのは、他の係数を求める積分の規格化係数に1/πを掛けていることに対応し、平均値の分母が本来2πであるべきところをあえて、1/2を表に出した形で統一したことによる。

デューティーサイクルを考慮した フーリエ係数の計算（2）

パルス状波形（箱型関数）の1周期に対する（H-レベル）デューティーを「D」として、フーリエ係数を求める公式に当てはめ、それぞれの係数がどのように表されるか計算する。



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi D} 1\cdot \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi D}^{2\pi} 0\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\right)\left[\cos nx\right]_0^{2\pi D}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}(\cos 2n\pi D - 1)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos 2n\pi D)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi D} 1\cdot \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi D}^{2\pi} 0\cdot dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\right]_0^{2\pi D}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\sin 2n\pi D)$$

デューティーサイクルを考慮した フーリエ係数の計算（3）

それぞれan、bnの係数が求まったので、それぞれの周期の強度（Intensity）を計算する。

$$I_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sqrt{(\cos 2n\pi D - 1)^2 + (\sin 2n\pi D)^2}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sqrt{\cos^2 2n\pi D - 2\cos 2n\pi D + 1 + \sin^2 2n\pi D}$$

1になる

$$= \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\sqrt{1 - \cos 2n\pi D}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \text{ とすれば}$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \text{ なので}$$

$$1 - \cos x = \underbrace{1 - \cos^2\frac{x}{2}}_{\Rightarrow \sin^2\frac{x}{2}} + \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\sin^2\frac{x}{2} \quad \text{…… となるから}$$

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

二乗して平方根をとったので絶対値。

ここで、右に書いた式の変形手順を使うと･･･

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\cdot\sqrt{2}\left|\sin\frac{2n\pi D}{2}\right|$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left|\sin(n\pi D)\right|$$

n=1 の時の最大振幅を1とすれば

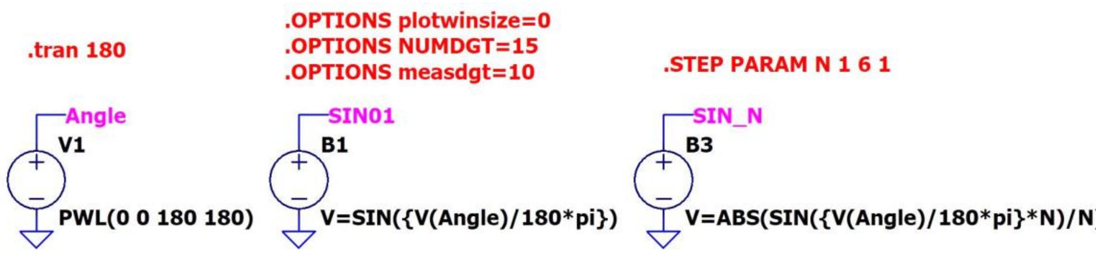
$$I_n \propto \frac{1}{n}\left|\sin(n\pi D)\right| \quad \text{となる。}$$

±1の振幅のパルス状波形のPowerスペクトラムの規格化係数が4/πであることはよく知られているので、ここで扱っている、0と1の振幅のパルスでは、気核か係数が2/πになっていることは納得できる。

デューティーサイクルを考慮した フーリエ係数の計算（4）

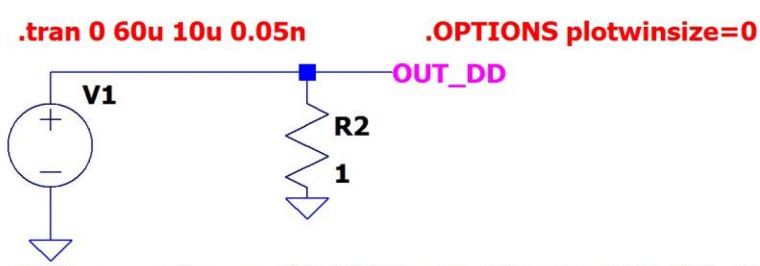
スペクトラムの各成分のIntensityとデューティーの関係を表す式は、最終的には右のように表すことができる（ただし、グラフの形状は相似だが、係数の不一致がある点に注意）。

この式を、LTspiceでグラフにするための回路図を下に示す。nは1次から6次まで変化させている。



デューティーサイクルを考慮した 実際のシミュレーション波形（5）

PWMを使って、デューティーを10%から50%まで10%刻みで変化させる、パルス状波形の生成回路と、シミュレーション結果（右図・最下段がデューティー10%）。

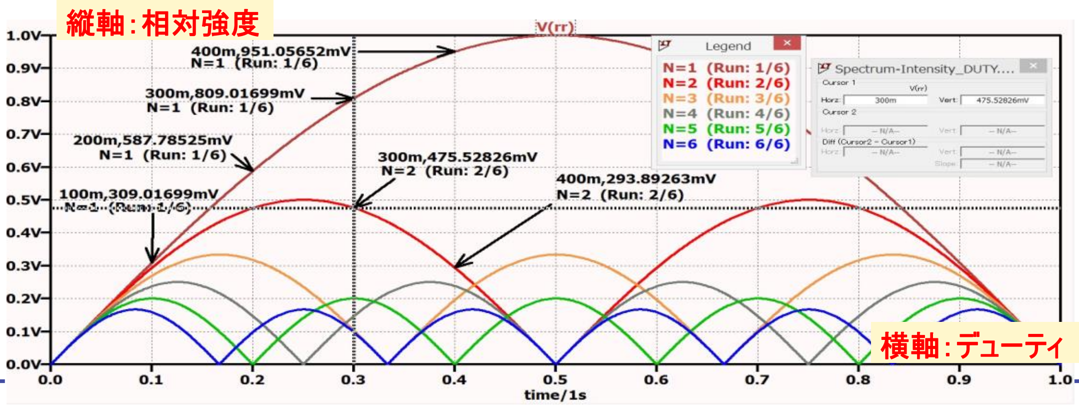


PWL repeat forever((0, 0)({1u-N}, 0)(+1p, 1)(+{N}, 1)(+1p, 0))endrepeat

.step param N 0.1u 0.5u 0.1u

デューティーサイクルを考慮した
フーリエ係数の計算（6）

シミュレーションでは、1次（基本波成分）から6次高調波までの、相対強度（基本波のデューティー50%の大きさを1として）を示している。この図は、降圧SW電源の出力電圧のリップル解析でよく見かけるが、その理由は、SW波形がパルス状波形であり、その電圧波形をLCのフィルターを通した周波数解析をする準備段階であることに起因している。しかし、その手法は正しいとは言えない（正しい解析手法に関しては、別の稿で解説することにする）。

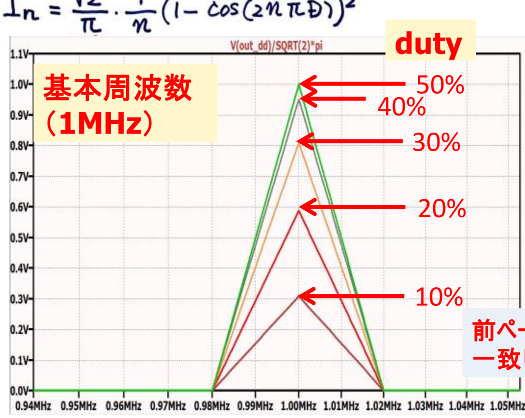


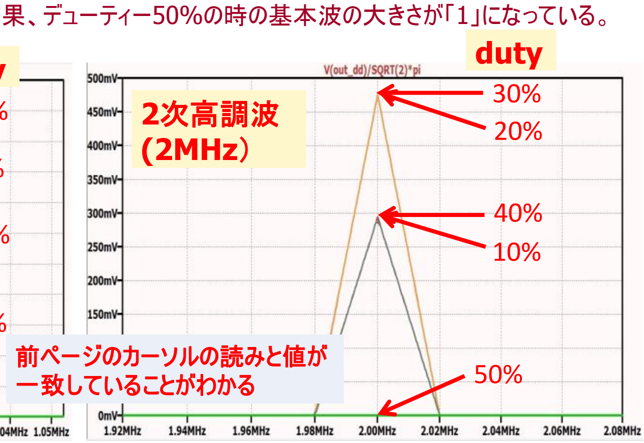
デューティーサイクルを考慮した
シミュレーションによるFFT（1）

本来の In の式は

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\cos(2n\pi D)\right)^{\frac{1}{2}}$$

グラフは[π/√2]を掛けて、規格化してある。
その結果、デューティー50%の時の基本波の大きさが「1」になっている。

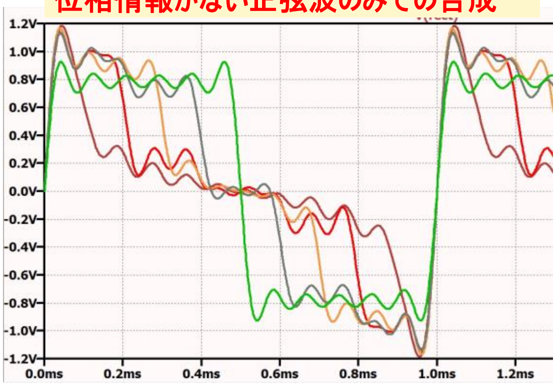




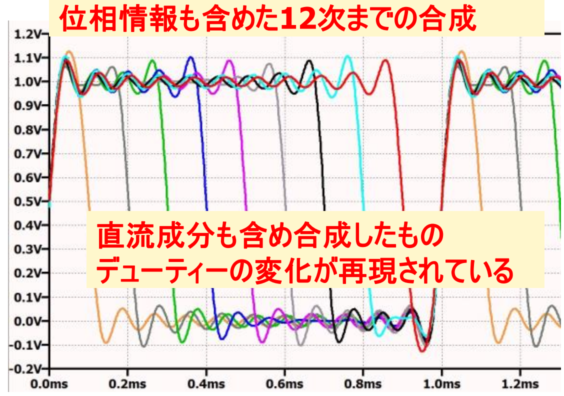
線形結合係数を用いた波形の合成（1）

では、それぞれの周波数成分の係数を基に、正弦波の高調波成分を足し合わせていくと、元のパルス状の波形が再現できるだろうか？　スペクトラムの強度（In:intensity）は、SINとCOSのそれぞれの係数の2乗の和の平方根だったことを思いだしてほしい。　強度信号（スペクトラム）になってしまうと、それぞれの周波数成分の大きさは分かっているが、位相のズレは反映されなくなってしまう。下にそれらの比較を示す。

位相情報がない正弦波のみでの合成



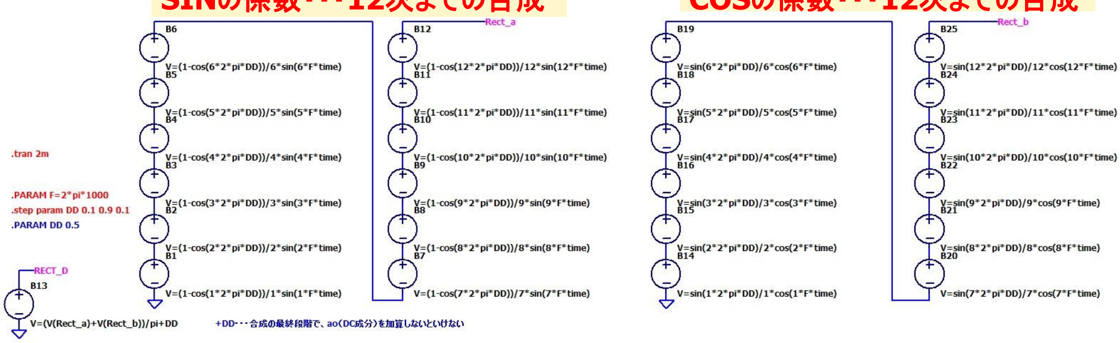
位相情報も含めた12次までの合成



線形結合係数を用いた波形の合成（2）

前ページでグラフを示した、パルス状波形を正しく合成するためのLTspice回路図を以下に示す。

SINの係数・・・12次までの合成　　**COSの係数・・・12次までの合成**



SINの係数とCOSの係数に、さらに直流の平均値を加算する項を追加してある

波形を忠実に合成するためには周波数成分の強さだけでは不十分で、位相情報が重要である。

SANKYOSHA　FAE : Michio Shibuya