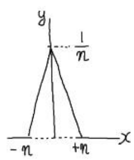
近似的δ（デルタ）関数のスペクトラム

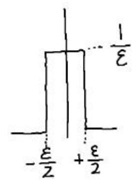
まず、デルタ関数の定義を思い起こそう。

幅が０ (ゼロ) で高さが無限大で面積が１の関数 (繰り返しはない)。

たとえば



とか



のような形で、

εやnが0になる極限と考えることができる。

では、これ等の場合について、LTspiceでシミュレーションしてみよう。ただし、FFTでは、周期をどんなに長くしても、繰り返し関数として扱われることを、考慮しておかなければならない。

幅の狭い単一・三角波を作る

シミュレーションの回路図を示す（方形波の場合より、シミュレーション時間が短い）

```
.param Tend=1 ;シミュレーション終了時間。この時間の逆数が<スペクトラムの最低周波数>になる。
.param PP={Tend*PW*fo} ;シミュレーション時間に対するパルス幅の比率<PW>をかけた幅
.tran 0 {Tend} 0 {PP/1000}
```

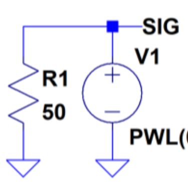
Maximum Time Step はパルス（底辺）幅の1/1000に設定

```
.param PW={1e-4}
.step param PW list 1e-6 1e-5 1e-4
.param fo={2/pi}
```

係数foについては後述する

```
; .options plotwinsize=0
.options numdgt=15
.options nomarch
```

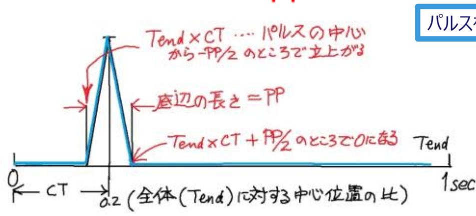
高周波側の減衰を決めるカットオフ周波数は、方形波に換算したときの実質的なパルス幅で計算されるべきなので、係数「2」をfoに組み入れてある。




```
PWL(0 0 {Tend*CT-PP/2} 0 {Tend*CT} {SQRT(2)/PP} {Tend*CT+PP/2} 0)
.param CT 0.2
* .step param CT list 0.1 0.5 ; No affect from CT (pulse position in a wave-form)
```

パルスの最大値は、三角波の面積が「RMSで1」になるように√２を掛けてある

パルスを生成する位置（CTの値）にはスペクトラムの大きさには影響しない



三角波パルスの外観のパラメータは左図のようになっている。

シミュレーション回路の解説（１）

パルス波形の面積を「１」にする･･･ということは、スペクトラムの低周波側の振幅を「0dB」に規格化するという意味である。すなわち、単一の周波数･･･正弦波であれば、RMS=1に対応した信号の強さを0dBに換算する。そこで、三角波のピーク値を正弦波と同じ値にすると、RMSは√2/2=0.707･･･になってしまうので、三角波のピークには√2=1.4142･･･を掛け、低周波側の振幅が0dBになるように規格化している。 また、スペクトラムの計算に「フーリエ変換」を利用することは、シミュレーション時間内では「単一のインパルスであっても･･･データの全ての長さを1周期と考え、周期関数とみなされる」ため、インパルスを正弦波の半周期と見立てると、その半周期の整数倍ごとにノッチが発生することが理解できる。三角波のパルスの場合には、方形波に換算する係数が必要になる。

インパルスそのもののスペクトラムは、デルタ関数と同様の振る舞いであれば「白色（･･･スペクトラムの強度が周波数に依存せず一定）」のはずである。･･･

シミュレーション回路の解説（２）

しかし、繰り返しによる周期的な方形波インパルスの場合、そのスペクトラムの関数は

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

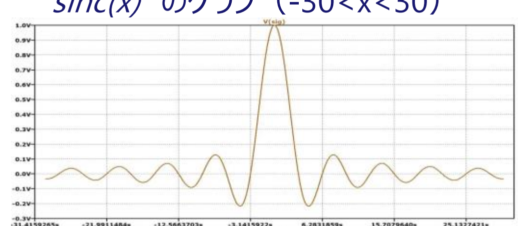
に従うことが知られており、この式からも x=π のところで振幅が 0 になることがわかる。ここで、x は元の方形波インパルスの幅を半周期としたときの角度に相当する。

数学的に使われる（非正規化sinc関数：シンクかんすう･･･という）は、次式で定義される。

$$sinc(x)=\frac{\sin(x)}{x}$$

信号処理などで使われる *sinc(x)* （正規化sinc 関数：標本化関数）は上の式の x に *π･x* を入れたもので定義されるが、ここでは、単に数学的な関数として考える。

sinc(x) のグラフ（-30<x<30）



|*sinc(x)*| のグラフ（-30<x<30）

上の2つのグラフとも、横軸は直線目盛りだが、一般的なスペクトルのグラフでは対数目盛りになることに注意。

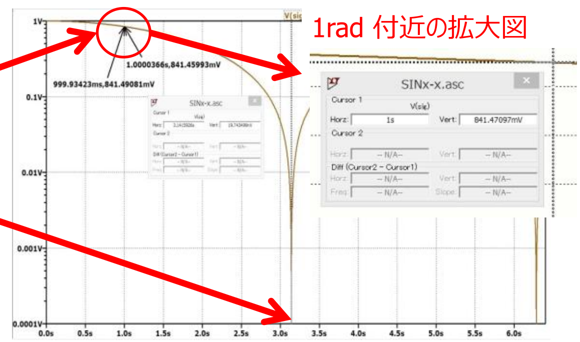
シミュレーション回路の解説（３）

ここで重要なポイント・・・インパルス波形のスペクトラムが *sinc(x)* になっているということは、高周波側で（包絡線が） *1/x* に従って減衰するということである (*注1) 。

低周波側ではほぼ白色と考えられるが、減衰し始めるカットオフ周波数に相当するポイント *fc* は・・・ *sinc(x)* の 1rad に相当する点である。これが、区切りのよい周波数（たとえば10kHzなど）にカットオフが来るように設定した回路図中のパラメータ「fo」である。

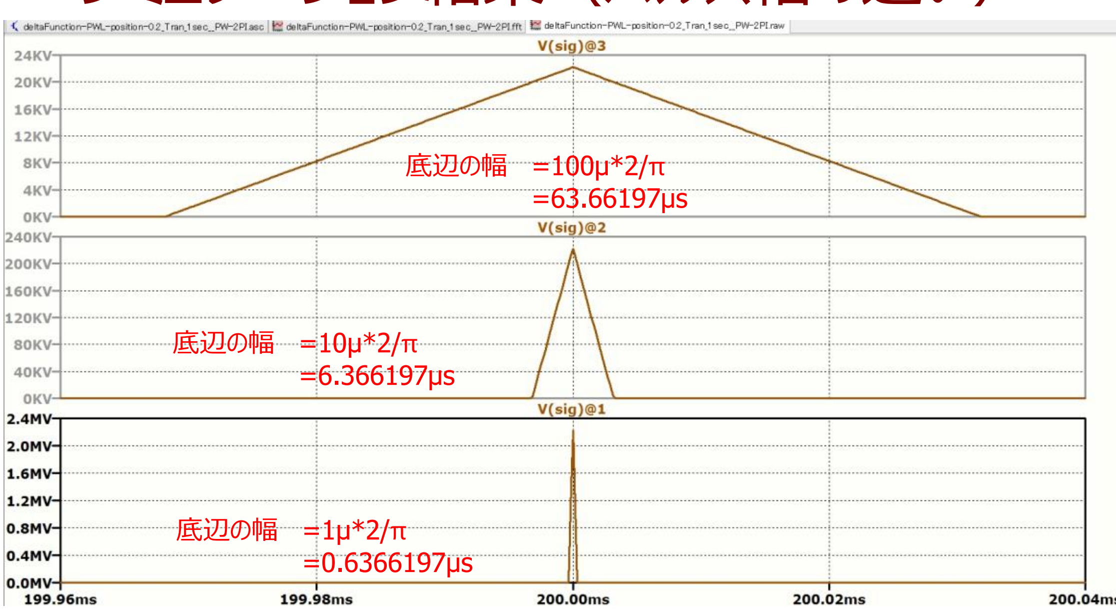
右図はこの関数の大きさを対数に変換したもので、20倍するとdBに換算できる。1radでの値は0.84147097・・・で、dB に換算すると、-1.49921709121・・・dB になる (*注2)。

πrad (3.14・・・) のところで 0 (対数にすると-∞・・・に近づく) になっていることも確認できる。

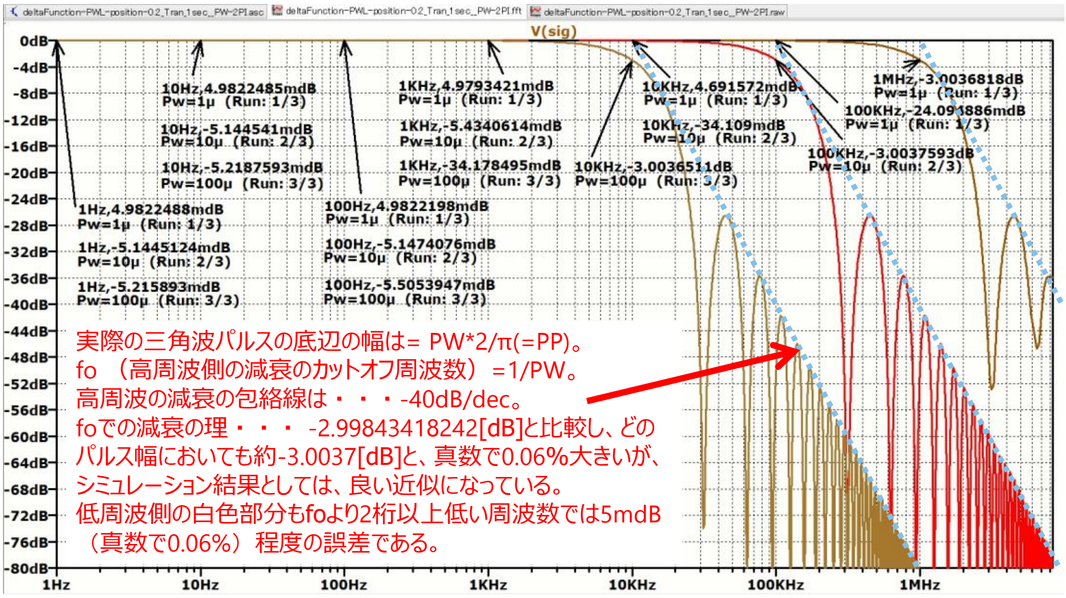


（*注1）三角波のインパルスの場合、三角波自身のスペクトラムが周波数の2乗で減衰するので、この包絡線も-40dB/decである。
（*注2）三角波のインパルスの場合、-2.99843418242[dB]。

シミュレーション結果（パルス幅の違い）



FFTによる周波数解析（スペクトラム）



幅の狭い単一・方形波を作る

シミュレーションの回路図を示す

.param Tend=1 ;シミュレーション終了時間。この時間の逆数が<スペクトラムの最低周波数>になる。

.param PP={Tend*PW*fo} ;シミュレーション時間に対するパルス幅の比率<PW>をかけた幅

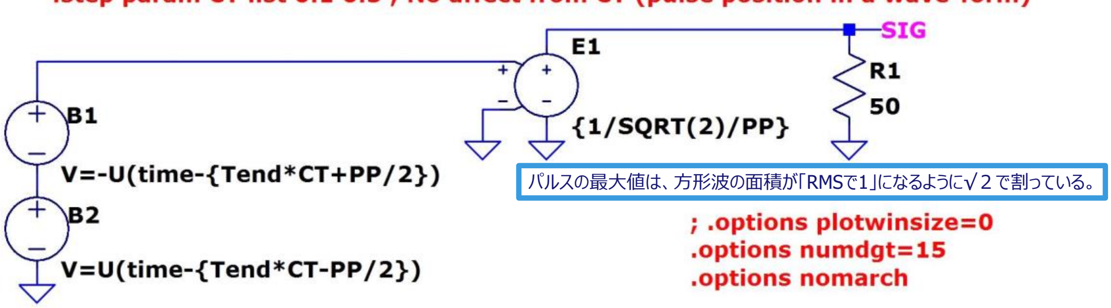
.tran 0 {Tend} 0 {PP/100}

.step param PW list 1e-6 1e-5 1e-4 **.param fo 1/pi**

; .param PW=1e-4

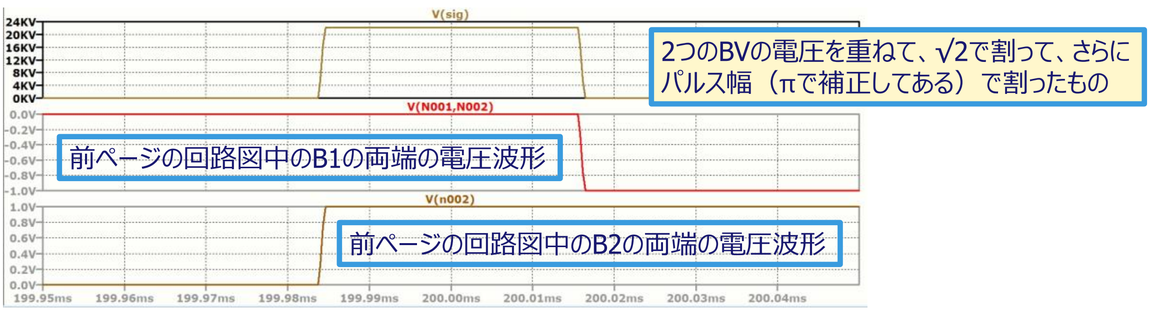
.param CT 0.2 パルスを生成する位置（CTの値）はスペクトラムの大きさには影響しない

*** .step param CT list 0.1 0.5 ; No affect from CT (pulse position in a wave-form)**



方形波パルスの作り方

階段波（ユニット関数）を時間をずらして、プラスとマイナスを重ね合わせることで、方形波（厳密には台形波）を生成する。

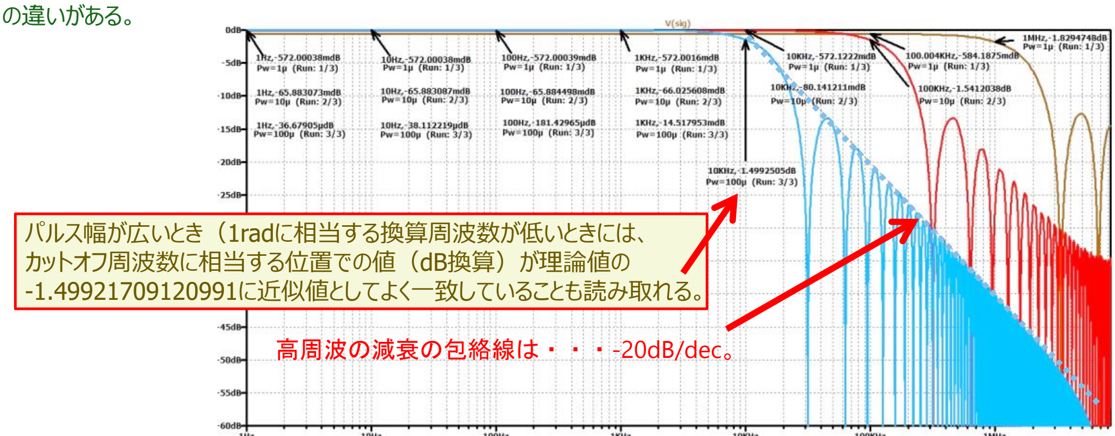


BVとEソース（電圧制御・電圧源）を組み合わせ、信号源生成に利用する。

方形波パルスによるスペクトラム

方形波インパルスと三角波インパルスによるシミュレーション上の違いは（低周波側の基準値を0[dB]に合わせるという意味において）、パルス幅の設定が異なることに起因するRMSの補正値や、カットオフの周波数が異なる点である。

このシミュレーションではそれらの数値を規格化するように調整した。その結果、得られるスペクトラムは、低周波側からすべての周波数範囲での大きさと高周波側の減衰量が異なっている。三角波の場合、方形波の2乗（dB表記では2倍）の大きさの違いがある。

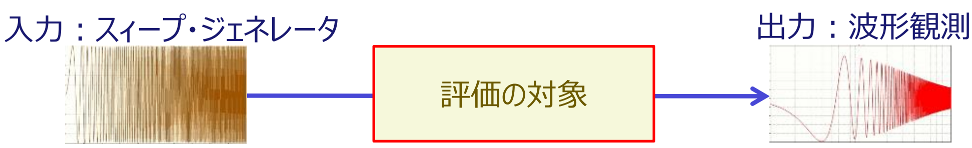


シミュレーションと同じ手法で実験するには・・

AC解析のシミュレーションでは・・・

このような接続をして出力を観測し、「出力/入力」を計算し、ボーデ線図をプロットする。
入力に「AC=1」と設定しても、１Vの振幅の信号を実際に入力しているのではなく、微小信号の伝達特性をシミュレーションするが、基準の大きさを0dBにするためにAC=1と書く。

実際に実験しようとすると・・・

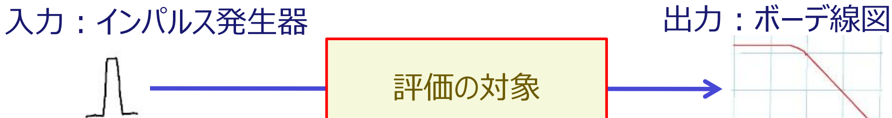


この入力の周波数掃引と出力の信号観測を1台で行い、「出力/入力」を計算し、ボーデ線図をプロットする機能を備えた計測が「周波数応答特性解析器（FRA）」である。

FRAを利用できない時は・・・

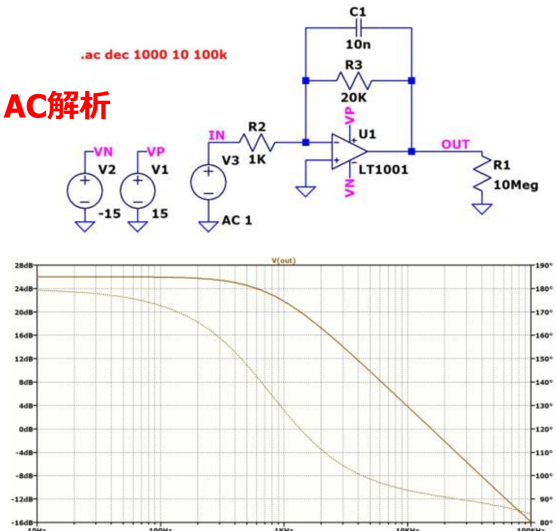
FRAは高価な計測器で、気軽に使えないこともある。一方、最近では高速サンプリングができFFT機能を備えたオシロ・スコープが低価格で利用できるようになってきた。

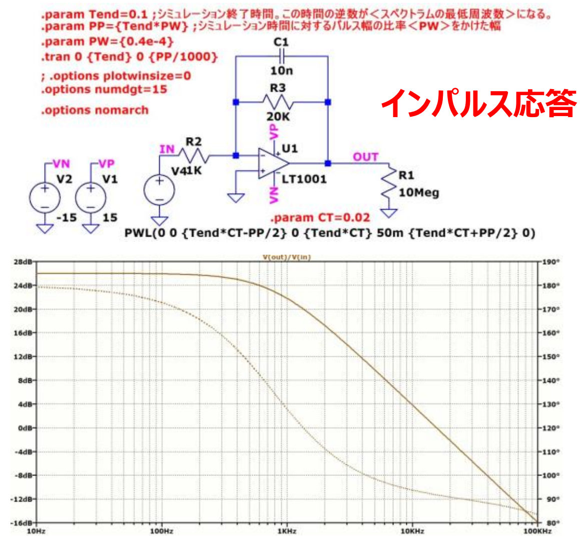
そこで、入力にインパルスを加え、波形を観測しFFTを行い、「FFT出力/FFT入力」を計算することで、ボーデ線図（周波数特性）を知ることができる。



インパルス発生器の波高値は数十mVに抑え、測定対象を破壊しないように気を付けること。

AC解析とインパルス応答の比較





Gain 特性も、位相特性も、グラフを比較する範囲で、よく一致していることが確認できる

まとめ と 注意点（１）

シミュレーションによる、AC解析手法もインパルス応答解析も、どちらも測定対象になる回路部分が「時間に対して連続かつ微分可能」でなければならない。すなわち、たとえばスイッチング電源の帰還系の応答特性の評価には利用できない。

また、ループ・ゲインの評価に使われるMiddlebrook法（注1）による、周波数応答解析も、LTspiceのライブラリーの・・・

「¥Program Files¥LTC¥LTspiceXVII¥examples¥Educational

の中の「LoopGain.asc」と「 LoopGain2.asc 」に紹介されているが、実際の回路評価との比較においては、通常のAC解析で十分と考える。

[注1] Middlebrook, R.D., "Measurement of Loop Gain in Feedback Systems", Int. J. Electronics, vol 38, No. 4, pp. 485-512, 1975

まとめ　と　注意点（２）

　インパルスが周期的に繰り返されると、*sinc(x)* 関数のスペクトラムを持つことをすでに述べた。すなわち伝達応答特性を調べるための近似として利用できるのは、その特性をG=V(out)/V(in)で計算するにしても、規格化した x で考えるとき、せいぜい $0 \leqq x < 2$ の範囲で利用することが望ましい。

　|*sinc(x)*|の形に注目すると・・・特に、横軸(x)を対数表示にし、縦軸(Gain)も[dB]表示にすると・・・その包絡線があたかも、バタワース・ロー・パス・フィルターに酷似している。それは、いずれの関数もx（あるいはω）の大きいところで、関数の値が、その逆数に比例している点が共通点だからといえる。しかし、数学的な関数の形としては、全く異なる形であることに注意しなければならない。

n次バタワース・ロー・パス・フィルターの特性を示す式

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$