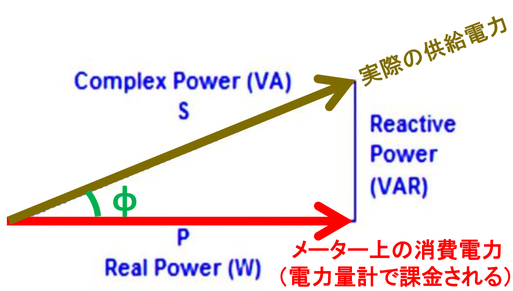
電源電流高調波と力率(PF)を LTspiceの .FOUR コマンドで求める

Power Factor （力率）は、電力会社が実際に供給している電力と、電力量計で積算される電力との比率と考えてよい。すなわち、電圧と電流のそれぞれの実効値で給電しているものを、力率の悪い負荷につなぐと、電力量計では電圧と電流のそれぞれの瞬時値の積を積算していくので、電圧と電流の位相が大きくずれていたり、電流波形に歪みがあると、実際の供給電力とのずれが大きくなる（電力会社が損をする）。かつては、工場などがモーター負荷（インダクタ成分が主）を多く使用していたので、位相のずれが力率悪化の主な要因であったが、最近ではコンデンサー入力の電子機器が増加したため、電流歪みによる力率悪化が問題視されるようになってきた。

このトピックでは、電流歪みによる力率の計算をシミュレーションで求めることと、力率改善機能（Power Factor Correction：PFC）付きのLEDドライバーを紹介する。

力率（Power Factor）の 図式的な概念（単相交流の場合）



電圧・電流それぞれの瞬時値の積の平均値

Real Power = P = V x I

Apparent Power = |S| = Vrms x Irms

Power Factor = P/ |S|

この図に示すように力率の基本的な概念は・・・電圧・電流の瞬時値の積[W]が、供給電力（電圧・電流のそれぞれの実効値の積[VA]よりも小さくなっている状況が起きる。以前は、工場などで使うモーターのインダクタンスによる位相のずれだけを考慮するだけでよかった。PCなどをはじめ、整流しコンデンサで平滑する機器が増えると、電流がパルス的に流れ、電流の高調波歪による力率の悪化が起きるようになった。全高調波歪をTHDとした場合の力率の定義を以下に示す。

$$PF = \frac{1}{\sqrt{1+THD^2}}\cos\varphi$$

電源電圧と電流の基本波の位相差

$$THD = \frac{I_h}{I_1} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}}{I_1}$$

詳細説明を以下に示す

力率の定義から電流の全高調波歪との関係を確かめる

$$力率(PF) = \frac{P}{S} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\cdot I\,dx}{V_{rms}\cdot I_{rms}}$$

ここで $V = V_1 \sin x$ とする

（基本波のみの無歪正弦波）

$$I = \underbrace{I_1 \sin(x+\varphi)}_{基本波成分} + I_2 \sin(2x+\theta_2) + I_3 \sin(3x+\theta_3) + \cdots$$

とする。

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(V_1 \sin x)^2 dx}$$

root　mean　square

$$= \frac{V_1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx}$$

$$= \frac{V_1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi} 1\,dx + \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx}_{=0}}$$

$$= \frac{V_1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{[x]_0^{2\pi}}$$

$$= \frac{V_1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}V_1 \quad \left(\text{OR } \frac{1}{\sqrt{2}}V_1\right)$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I_1\sin(x+\varphi) + I_2\sin(2x+\theta_2)+\cdots)^2 dx}$$

ここで

$$I_m\cdot I_n\int_0^{2\pi}\sin(mx+\theta_m)\cdot\sin(nx+\theta_n)dx = 0$$

ただし $(m \neq n)$ [周期が異るsinの直交性]

$$I_m^2 \int_0^{2\pi}\sin^2(mx+\theta_m)dx = I_m^2\cdot\pi$$

ただし $(m = n)$　だから、

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \cdots}$$

ここで $THD^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{I_n}{I_1}\right)^2$ OR $\frac{1}{I_1^2}\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2$

とおけば

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot I_1\sqrt{1+THD^2}$$

$$= \frac{I_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+THD^2}$$

したがって

$$S = V_{rms}\cdot I_{rms} = \frac{V_1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+THD^2}$$

$$= \frac{V_1 I_1}{2}\sqrt{1+THD^2} \quad \leftarrow 分母部分$$

THDは基本波の振幅を1とした時の高調波ごとの振幅を2乗した総和の平方根

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\cdot I\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1 \sin x\cdot I_1\sin(x+\varphi)dx$$

ただし、Iの中の $\sin(nx+\theta_n)$ と $\sin x$ の積を $0\sim 2\pi$ で定積分すると全て0になる

[$n \neq 1$ のとき、周期の異なる正弦関数の直交性]

したがって

$$P = \frac{V_1\cdot I_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)dx$$

$$= \frac{V_1 I_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\underbrace{\cos(x+x+\varphi)}_{\int_0^{2\pi}\cos(2x+\varphi)dx=0} + \underbrace{\cos(x-x-\varphi)}_{\cos(-\varphi)=\cos\varphi})dx$$

$$= \frac{V_1 I_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cos\varphi\,[x]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{V_1 I_1}{2}\cos\varphi \quad \leftarrow 分子部分$$

$$PF = \frac{P}{S}$$

$$= \frac{\frac{V_1 I_1}{2}\cdot\cos\varphi}{\frac{V_1 I_1}{2}\sqrt{1+THD^2}}$$

$$PF = \frac{1}{\sqrt{1+THD^2}}\cos\varphi$$

このようにして、力率の定義式から、電流のTHDの関係付けが理解できる

＜補足説明＞電圧位相と電流位相の関係

位相の進み・遅れ・・・時間が進んだり遅れたりするわけではない。

そもそも「ディメンジョン」が違う。「位相」は「ディメンジョン・レス（無名数）」、「時間」は基本単位「時間」のディメンジョン。

位相の進み遅れを、時間の前後関係と勘違いしていて、「因果関係（因果律）」と結びつけている人を見かけるが、大いなる勘違い。

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}, \quad V_C = \frac{1}{C}\int I_C\,dt$$

または

$$I_L = \frac{1}{L}\int V_L\,dt, \quad I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

これらの式で示すように、電圧と電流はコイルやコンデンサによって微分あるいは積分の演算でつながっている。回路中のさまざまなリアクタンス成分によって位相が進んだり遅れたりする。

I_L, I_C を I として周波数を考慮しなければ

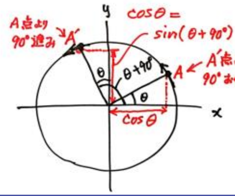
$I = a\sin t$ とおくと

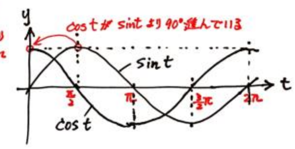
インダクタの電圧は電流位相から90度進み

$$V_L = L\frac{d}{dt}(a\sin t) = L\cdot a\cdot\cos t = L\cdot a\cdot\sin(t+90^\circ)$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int(a\sin t)dt = \frac{a}{C}\cdot(-\cos t) = \frac{a}{C}\sin(t-90^\circ)$$

コンデンサの電圧は電流位相から90度遅れ





幾何学図形的な電流波形の力率の
理論値とシミュレーションを比較する（方形波）
（.FOURの設定については、このドキュメントの後半に記載）

.tran 0 100m 0 0.1u　　.FOUR 50 40 -1 I(V1)
.OPTIONS plotwinsize=0

;Power Factor Calculation
.Options measdgt 10

.meas start param 0
.meas end param 100ms
.meas P AVG -V(VV)*I(V1) from start to end
.meas Vrms RMS V(VV) from start to end
.meas Irms RMS I(V1) from start to end
.meas S param Vrms*Irms
.meas PF param P/S

方形波電流の場合
正弦波電圧の符号(+/-)の電流にする

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	5.000e+1	1.273e+0	1.000e+0	-180.00–	0.00–

Total Harmonic Distortion: 47.032238%(48.340569%) PF=0.904911(0.900323)

.FOUR のTHD から計算したPF（設定した40周期までとカッコ内は全歪のTHDから計算したもの・・理論値に近い）。

MaximumTimeStep を細かくし、データ・ポイント数を上げ、かつ、データ圧縮をしなければ高精度になる。
ポイント数を増やすと、シミュレーション終了後の.measの計算に時間がかかる。

p: AVG(-v(vv)*i(v1))=90.03163145 FROM 0 TO 0.1
vrms: RMS(v(vv))=99.99999983 FROM 0 TO 0.1
irms: RMS(i(v1))=0.9999921193 FROM 0 TO 0.1
s: vrms*irms=99.99921177
pf: p/s=0.9003234111

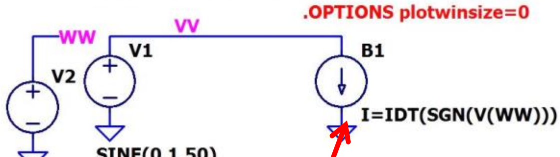
.measで計算したPF

幾何学図形的な電流波形の力率の
理論値とシミュレーションを比較する（三角波）
（.FOURの設定については、このドキュメントの後半に記載）

.tran 0 100m 0 0.1u　　.FOUR 50 40 -1 I(V1)
.OPTIONS plotwinsize=0

;Power Factor Calculation
.Options measdgt 10

.meas start param 0
.meas end param 100ms
.meas P AVG -V(VV)*I(V1) from start to end
.meas Vrms RMS V(VV) from start to end
.meas Irms RMS I(V1) from start to end
.meas S param Vrms*Irms
.meas PF param P/S



三角波電流
の場合
余弦波電圧の符号(+/-)を積分して電流にする

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	5.000e+1	4.053e-3	1.000e+0	-180.00–	0.00–

Total Harmonic Distortion: 12.114219%(12.115293%) PF=0.992742(0.992741)

.FOUR のTHD から計算したPF（設定した40周期までとカッコ内は全歪のTHDから計算したもの・・理論値に近い）。

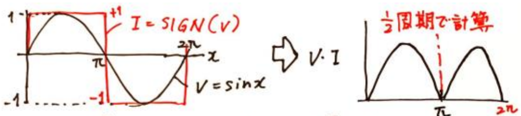
MaximumTimeStep を細かくし、データ・ポイント数を上げ、かつ、データ圧縮をしなければ高精度になる。

p: AVG(-v(vv)*i(v1))=0.002026423672 FROM 0 TO 0.1
vrms: RMS(v(vv))=0.7071067812 FROM 0 TO 0.1
irms: RMS(i(v1))=0.002886751345 FROM 0 TO 0.1
s: vrms*irms=0.002041241452
pf: p/s=0.9927408003

.measで計算したPF

幾何学図形的な電流波形の力率の理論値の計算（基本波の電流が同相・・cosφ=1の場合）

方形波電流と三角波電流の場合について、理論値を計算したものを示す。左(下)が方形波の場合、右が三角波の場合。どちらも数値を求めると、シミュレーションの結果（THDから求めたものも、.measで計算したものも）のどちらともよく一致していることがわかる。

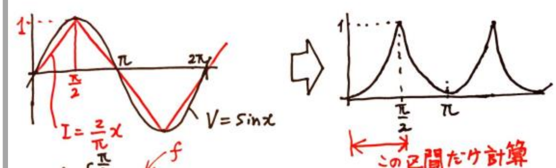


$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin x)\cdot 1\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx}\ \cdots\ \text{rmsは½周期でも同じ}\ \cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1^2\,dx}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\left[x\right]_0^{\pi}}=1$$

$$PF=\frac{P}{V_{rms}\cdot I_{rms}}=\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=0.900316\cdots$$



$$P=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(\frac{2}{\pi}x\right)}_{f}\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx\qquad \int fg'=[fg]-\int f'g$$

とすると $g=-\cos x$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

$$V_{rms}=\cdots\ 0\sim\pi/2\text{でも1周期でも同じ}\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I_{rms}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2dx}=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx}=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$PF=\frac{P}{S}=\frac{(2/\pi)^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sqrt{6}=0.992740800\cdots$$

幾何学図形的な電流波形のTHDの理論値の計算(1)

ここまで示してきたような幾何学的な波形（方形波と三角波）では、力率(PF)はその定義式から計算ができるので、わざわざTHDを計算する必要はない。

ここでは＜参考までに・・・＞THDも計算してみよう。

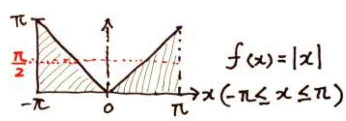
まず、方形波の場合、その波形をフーリエ級数展開すると、（デューティが50%であれば）奇数次の高調波だけが残り、その係数は次数の逆数になる。

$$f(x)=\underbrace{DC}_{\text{THDには無関係}}+\underbrace{1\cdot\sin x}_{\text{この基本波の振幅を1とする}}+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots$$

$$THD=\sqrt{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots}$$

全高調波歪（THD)は高調波成分の係数の二乗の総和の平方根になる。この平方根の中を見ると、奇数の逆数の2乗の総和から1を引いたものになっていることがわかる。そこで、奇数の逆数の総和を求めてみる。

ここからは、級数の総和を求める場合に利用される技巧的な手法を紹介する。



$$\text{平均値}=\frac{1}{2\pi}\left(2\times\pi\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

この右上の図のような関数を考え、そのフーリエ級数展開を求めてみる。関数が偶関数であることに注目し、プラス部分だけを積分し2倍する。

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)$$

$$=\frac{-1}{\pi n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2\{(-1)^n-1\}}{\pi n^2}=\begin{cases}0 & (n=\text{even})\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & (n=\text{odd})\end{cases}$$

幾何学図形的な電流波形のTHDの理論値の計算(2)

したがって元の関数のフーリエ級数展開は

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\cdots\right)$$

$x=0$ を代入すると　$f(x)=0$ だから

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\right)$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$ ← 奇数の2乗の総和

したがって全高調波歪(THD)は →

$$\boxed{THD=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-1}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}-1}}$$

このTHDによるPFは

$$PF=\frac{1}{\sqrt{1+THD^2}}\underbrace{\cos\varphi}_{=1}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

・・・となり、力率の定義から計算した結果に一致する。

もう一つ、三角波の場合のTHDも計算してみる。三角波のフーリエ級数展開はよく知られているように奇数次の2乗の逆数が係数になっている。

すなわち、THDを計算するには、奇数の逆数の4乗の総和を求めなければならない。この計算はかなり面倒なので、「数学公式集」に頼ることにした。

$$f(x)=1+\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x+\cdots$$

$$THD=\sqrt{\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+\left(\frac{1}{5^2}\right)^2+\cdots\cdots}$$

$$=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}-1}$$ ← 数学公式集から

$$=\sqrt{\frac{\pi^4}{96}-1}$$

$$PF=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi^4}{96}-1\right)}}\underbrace{\cos\varphi}_{=1}=\frac{\sqrt{96}}{\pi^2}=\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}$$

・・・となり、力率の定義から計算した結果に一致する。

.FOUR コマンドの使い方

ここまでは、力率(Power Factor)と全高調波歪(THD)の関係式について考察し、方形波と三角波を例題に理論値の計算とSPICEのシミュレーションを比較検討してきた。

当初、力率といえば、電力料金の問題・・・電力需要者と電力会社の間に生ずる「課金」の問題として考慮されるべきものだったが、最近ではIECの勧告「IEC61000-3-2」にもみられるように、「電源高調波電流の規制」では「力率」に触れた部分はなく「EMC(電磁両立性)」にかかわる「ノイズ規制」に主眼が置かれている。

回路設計においても、シミュレーションであらかじめ電源電流高調波を見積もることができれば、国内・国外におけるEMC規制に対応するための評価ができるはずである。

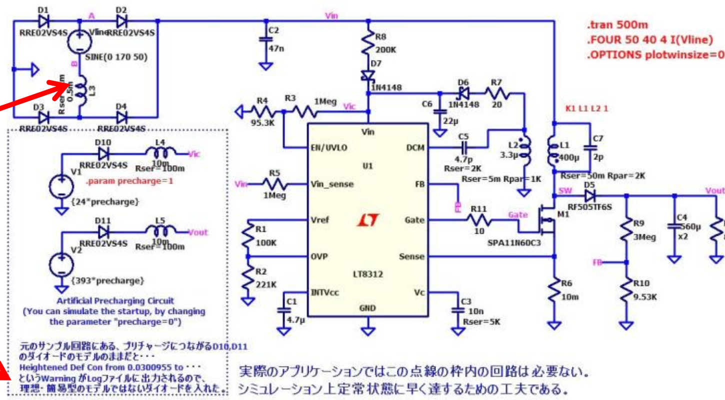
以下のように、SPICEディレクティブとして「.FOUR 」コマンドを回路図に置き、シミュレーションを実行したのち、SPICE Error Log を開き、PFを読み取る。

.FOUR 50 40 -1 I(V1)

- 50：基本の周波数
- 40：計算する次数
- -1：周期：シミュレーションの最後の時間からN周期手前までのデータを解析する。-1　を入れると、データの全領域を使う
- I(V1)：解析する信号名

このオプションも併用することを推奨する → **.Options plotwinsize=0**

LT8312 の例（回路図と力率）



スイッチング・ノイズを入力電源側に通過させないためのフィルター効果。
大きくし過ぎると電流波形が歪み、力率が悪化する。

回路図中のコメントに注意

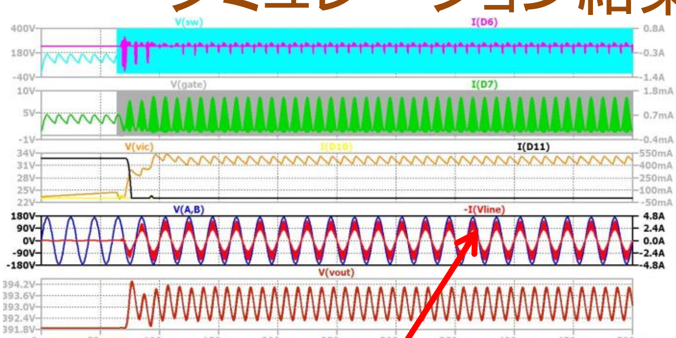
Total Harmonic Distortion: 10.389305%(20.310833%) PF=0.994617(0.979962)

LOGファイルから、40周期までのTHD で求めた力率は・・・PF=99.46%　と読み取ることができる

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	5.000e+1	2.672e+0	1.000e+0	-179.56−	0.00−

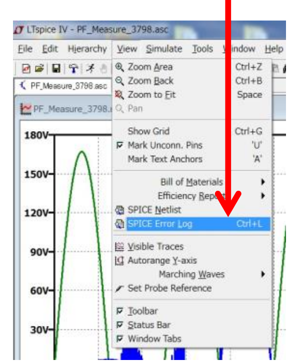
LOGファイルから読み取った1次の電流位相は-179.56°(=0.48°)である。

シミュレーション結果とLOG



回路図ペインをアクティブにして
View
SPICE Error Log
をクリック
ファイルの下の方に計算結果が表示される

添付の「Error-Log_LT8321.txt」も参照



シミュレーション結果のうち、入力の交流電源の電圧（青）と電流（赤）。
スイッチング周期で電流波形が三角波で変調されているが、一般的なコンデンサ入力の整流回路のように、毎周期ごとの突入電流にはなっていないので、40周期までのTHDによる力率悪化は4.1%程度である（ただし、全高調波までを計算に入れてしまうと、力率＝93.93%に悪化してしまうが・・・）。また、1次電流の位相差も4°（力率への影響はcos(0.48°)=0.0035%）である。
Power Factor Correction (PFC:力率改善）では、EMC規制による電源電流高調波に着目していることがポイントである。